Programme de colle n°8

semaine du 17 au 22 novembre 2025

Même programme de colle que la semaine dernière

Chapitre 7 : Lois usuelles discrètes

- Loi certaine, espérance et variance.
- Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, espérance et variance.
- Loi de Bernoulli, espérance et variance.
- Loi binomiale, espérance et variance.
- Loi géométrique, espérance et variance.
- Loi de Poisson, espérance et variance.

Chapitre 8 : Matrices

- Définitions
  - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Égalité de deux matrices
  - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
  - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
  - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
  - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
  - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
  - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
  - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
  - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
  - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
  - Puissances de la matrice identité
  - Formule du binôme de Newton
  - Puissances d'une matrice diagonale
- Inversibilité d'une matrice carrée
  - Définition
  - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale

  - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
  - Méthode lorsqu'on a une relation entre I, A, A^2 ...(vue sur des exemples)
  - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
  - Inverse d'un produit
  - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.

- systèmes linéaires
  - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
    $L_i \leftarrow L_j$
    $L_i \leftarrow \lambda L_j$
    $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Questions de cours

En début de colle, chaque élève devra donner avec précision deux lois usuelles choisies par l'interrogateur et les définir complètement ainsi que donner l'espérance et la variance.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 2 TD7
Soit $p \in]0,1[$.
On considère X une variable aléatoire discrète de loi géométrique de paramètre p.

(a) Calculer la probabilité que X prenne une valeur impaire, en déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

(b) On note F la fonction de répartition de X.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $F(n)$.
En déduire la probabilité $P(X > n)$.

E2 - Exercice 3 TD7
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et Y suit la loi de Poisson de paramètre μ, avec λ et μ deux réels strictement positifs.
On note $Z = X + Y$.

(a) Donner $E(Z)$ et $Z(\Omega)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(Z = n)$ en fonction d'événements faisant intervenir les variables aléatoires X et Y.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, développer $\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$.

(d) En déduire la loi de Z.

E3 - Exercice 2 TD8 question 2
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

E4 - Exercice 2 TD8 question 3
On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.