

Programme de colle n°11

semaine du 5 au 10 janvier 2026

Chapitre 12 « Diagonalisation »

I Formule de changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Une matrice de passage est inversible.
- Formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$

II Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

- Définition : valeur propre
- Caractérisation : λ est valeur propre de f , si et seulement si, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$
- Définition : vecteur propre
- Définition : sous-espace propre
- Propriété : les sous-espaces propres sont des sous-espaces vectoriels
- Propriété : la concaténation de bases de sous-espaces propres distincts forme une famille libre

III Diagonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

- Définitions :
 - ▶ f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale
 - ▶ A est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
- Caractérisation : f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f
- Propriété : la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n .
- Théorème : f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n .

IV Cas des matrices symétriques réelles

- Définition
- Théorème : une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Ex2 TD12 : *En dimension 2*

On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M .
- (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de M .
- (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}MP$.

E2 - Ex4 TD 12 : *En dimension 3, valeurs propres données*

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que 2 et 3 sont des valeurs propres de M .
On note E_2 et E_3 les sous-espaces propres associés.
- (b) Déterminer une base de E_2 et une base de E_3 .
- (c) Justifier que M est diagonalisable.
- (d) On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs des bases obtenues à la question 2.
Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (e) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}MP$.

E3 - EX5 TD12 *En dimension 3, vecteurs propres donnés*

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit $u = (1; 1; -2)$, $v = (0; 1; -1)$ et $w = (1; 1; 1)$.

- (a) Justifier sans calculs que A est diagonalisable.
- (b) Justifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On note alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- (c) Justifier que u, v, w sont des vecteurs propres de f .
- (d) Justifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.