Programme de colle n°4

semaine du 5 au 10 octobre 2026

Chapitre 3 : Etudes de fonctions

- **Généralités sur les fonctions**
  - Définition : image, antécédent.
  - Composition de deux fonctions
- **Parité**
- **Monotonie**
- **Majorant, minorant,maximum,minimum**
  - Condition nécessaire d'extremum
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives.
  - Caractérisation des bijections et fonctions réciproques.
  - Théorème de la bijection
  - Théorème des valeurs intermédiaires.

Chapitre 4 : séries numériques à termes positifs

- **Définition et propriétés**
  - Définition : série, somme partielle
  - Propriété : croissance de la suite des sommes partielles
  - Définition : série convergente, série divergente, somme d'une série
  - Condition nécessaire de convergence d'une série
  - Linéarité de la somme
  - Théorèmes de comparaison
- **Séries de référence**
  - Séries de Riemann : divergence de $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique), convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$
  - CNS de convergence et somme des séries suivantes :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k\geq 0} q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k\,q^{k-1} \qquad \sum_{k\geq 0} k(k-1)q^{k-2} \quad .$$

Questions de cours

Q1 - Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Q2 - Donner la définition de suites adjacentes et énoncer le théorème des suites adjacentes.

Q3 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs ?

Q4 - Donner les séries de référence (au choix pour le colleur).

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 5 TD 3 : On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x\ln(x) - 1$.

1. Donner le domaine de définition et celui de continuité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans un ensemble que l'on précisera.

E2 - Exercice 6 TD 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 + \ln(x))$.

1. Donner le domaine de définition et celui de continuité de f. On admet que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Montrer que la dérivée f' de f ne s'annule qu'en une seule valeur notée α.
3. Prouver que $5/10 < \alpha < 6/10$.
4. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f.

E3 - Exercice 3 TD4 : Convergence de $\sum \frac{1}{n!}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

(a) Démontrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ converge.

E4 - Exercice 6 TD4 : *Convergence de* $\sum \frac{1}{n^2}$

(a) Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$.

(c) Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

(d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^3 - 5n + 6}{(n^2-6)^2(n+1)}$.