Programme de colle n°11

semaine du 24 au 29 novembre 2025

Chapitre 8 : Matrices

- Définitions
  - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Égalité de deux matrices
  - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
  - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
  - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
  - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
  - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
  - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
  - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
  - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
  - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
  - Puissances de la matrice identité
  - Formule du binôme de Newton
  - Puissances d'une matrice diagonale
- Inversibilité d'une matrice carrée
  - Définition
  - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale
  - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
  - Méthode lorsqu'on a une relation entre I, A, A^2 ...(vue sur des exemples)
  - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
  - Inverse d'un produit
  - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.
- systèmes linéaires
  - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
    $L_i \leftarrow L_j$
    $L_i \leftarrow \lambda L_j$
    $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

- **Espaces vectoriels**
  - Définition, propriétés
  - Espaces vectoriels de référence $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- Sous-espaces vectoriels
  - Définition
  - Intersection de sous-espaces vectoriels
- Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré, famille génératrice
  - Vecteurs colinéaires
  - Combinaison linéaire
  - Notation $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$
  - Propriété : $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel
  - Famille génératrice d'un espace vectoriel
- Famille libre, famille liée
  - Définition : famille libre, famille liée
  - Caractérisations :
    - une famille d'un seul vecteur est libre, si et seulement si, ce vecteur est non nul ;
    - une famille de 2 vecteurs est libre, si et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ;
    - une famille de n vecteurs est liée, si et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Bases, dimension
  - Définition d'une base
  - Définition de la dimension
  - Une famille est une base si et seulement si elle vérifie deux conditions parmi les trois suivantes :
    - famille libre
    - famille génératrice
    - nombre d'éléments est égal à $\dim(E)$
  - Espace vectoriel de dimension 0, 1, 2
  - La dimension d'un sous-espace vectoriel est inférieure ou égale à $\dim(E)$, cas d'égalité
  - Base canonique de $\mathbb{R}^n$, dimension de $\mathbb{R}^n$
  - Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, dimension de $\mathbb{R}_n[X]$
- Coordonnées dans une base, matrice représentative dans une base
  - Coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base, matrice représentative d'un vecteur dans une base

  - Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base

- Rang
  - Rang d'une famille de vecteurs : $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n) = \dim(\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_n))$
  - Rang d'une matrice : rang de la famille de vecteurs représentée pas A
  - Rang d'un système : nombre de pivots du système homogène associé
  - Propriété : le rang d'une matrice est égal au rang du système homogène associé

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 2 TD8 question 2
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

E2 - Exercice 2 TD8 question 3
On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E3 - Ex3 TD 9 : *Espace vectoriel de polynômes*
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on note F l'ensemble des polynômes de la forme :

$$aX^2 + bX + c \quad \text{avec } c = 2b - a$$

(a) On considère les polynômes $P(X) = X^2 + 2X + 2$ et $Q(X) = X^2 + 2X + 3$.
Les polynômes P et Q appartiennent-ils à F ?

(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Déterminer la dimension de F.

E4 - Ex4 TD 9 :*Droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note F l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant le système :

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la dimension de F.