Programme de colle n°15

semaine du 2 au 7 février 2026

Reprise du programme de colle précédent **Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »**

Chapitre 15« Lois usuelles à densité »

I. Loi uniforme sur $[a,b]$

- densité, fonction de répartition, espérance et variance

II. Lois exponentielles

- densité, fonction de répartition, espérance et variance

III. Loi normale centrée réduite

- densité
- Propriétés algébriques de la fonction de répartition
- Espérance et variance de la loi normale centrée réduite

IV. Loi normale d'espérance m **et de variance** σ^2

- densité
- Lien avec la loi normale centrée réduite
- Espérance et variance
- Savoir centrer et réduire une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - *Loi exponentielle et loi uniforme*
On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
On suppose que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0;4]$.

(a) Rappeler l'expression d'une densité f de M et d'une densité g de M.

(b) Donner l'expression de la fonction de répartition F de M et de la fonction de répartition G de N.

(c) Quel est la probabilité que le temps de passage sur la chaîne A soit inférieur à 2 minutes ? supérieur à 2 minutes ? supérieur à 3 minutes sachant qu'il est supérieur à 1 minute ?

(d) Mêmes questions pour le temps de passage sur la chaîne B.

(e) On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce. Exprimer S en fonction de M et de N , déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce et préciser la valeur de $V(S)$.

E2 - *Lois exponentielles*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 3.
On définit la variable aléatoire :

$$Y = \frac{X}{2}$$

(a) Rappeler la densité usuelle f de X, sa fonction de répartition F, ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.

(b) En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

(c) Déterminer la fonction de répartition G de Y.

(d) En déduire que Y suit une loi usuelle et en donner une densité g.

(e) Retrouver alors la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$.

E3 - *Lois normales*

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On donne les valeurs suivantes :

$$\Phi(0,25) \approx 0,5987 \quad , \quad \Phi(1) \approx 0,8413$$
$$\Phi(1,96) \approx 0,975 \quad , \quad \Phi(2) \approx 0,9772$$

(a) Dans cette question, X est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

i. Calculer $P(X > 0,25)$.
ii. Calculer $P(X < -0,25)$.
iii. Calculer $P(-0,25 < X < 0,25)$.
iv. Déterminer $t > 0$ tel que $P(-t < X < t) = 0,95$.

(b) Dans cette question, Y est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(8;4)$.

i. Calculer $P(Y > 8,5)$.
ii. Calculer $P(Y < 7,5)$.
iii. Calculer $P(10 < Y < 12)$.
iv. Calculer $P_{(Y>10)}(Y > 12)$.