Programme de colle n°6

semaine du 2 au 7 novembre 2026

Chapitre 5 : Matrices

- Définitions
  - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Égalité de deux matrices
  - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
  - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
  - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
  - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
  - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
  - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
  - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
  - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
  - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
  - Puissances de la matrice identité
  - Formule du binôme de Newton
  - Puissances d'une matrice diagonale
- Inversibilité d'une matrice carrée
  - Définition
  - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale
  - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
  - Méthode lorsqu'on a une relation entre I, A, A^2 ...(vue sur des exemples)
  - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
  - Inverse d'un produit
  - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.
- systèmes linéaires
  - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
    $L_i \leftarrow L_j$
    $L_i \leftarrow \lambda L_j$
    $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Chapitre 6 : Probabilités discrètes

- **Définitions et premières propriétés**
  - Définition d'événements incompatibles (synonyme : disjoints)
  - cas particulier : probabilité d'un réunion disjointe finie
  - Définition d'événement contraire et propriété $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  - Propriété : probabilité d'une réunion de 2 événements (pas nécessairement disjoints)
    La formule pour $n > 2$ événements est hors-programme
  - Définition : probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nulle
  - Définitions : événement presque impossible, événement presque certain
- **Système complet d'événements, formule des probabilités totales**
  - Définition : système complet d'événements (fini ou infini)
  - Propriété : la somme des probabilités des événements d'un système complet est égale à 1
  - Formule des probabilités totales pour un système complet d'événements (fini ou infini) sous deux formes (avec les intersections, avec les probabilités conditionnelles)
- **Probabilité conditionnelle**
  - Propriété : la probabilité sachant un événement est une probabilité et toutes les propriétés qui en découlent.
  - Formule de Bayes
  - Formule des probabilités composées (pour $n > 1$ événements)
- **Indépendance**
  - Définition : A et B indépendants, ssi, $P_A(B) = P(B)$, ssi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - Définition non formalisée de l'indépendance mutuelle d'événements (probabilité de n'importe quelle intersection égale au produit des probabilités)

Questions de cours

Q1 - Donner la définition d'une matrice inversible.

Q2 - Enoncer la formule du binôme de Newton pour des matrices avec les conditions d'application de la formule

Q3 - Enoncer la formule des probabilités composées.

Q4 - Enoncer la formule des probabilités totales.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 2 (TD5 question 2) : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

E2 - Exercice 2 (TD5 question 3) : On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E3 - Exercice 3 TD6
nombre fini / infini de lancers
Une pièce truquée donne pile avec probabilité $\frac{1}{100}$.
On effectue des lancers indépendants.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- P_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne pile »
- F_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne face »

On se demande s'il est possible de n'obtenir aucun pile.

(a) Dans cette question, on effectue une suite illimitée de lancers.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit B_k : « pile apparaît pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ lancer » .
On définit de plus l'événement B : « on obtient au moins une fois pile » .

i. Calculer $P(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

ii. Exprimer B en fonction des événements B_k , en déduire $P(B)$.

iii. Déterminer enfin la probabilité de l'événement A : « on n'obtient aucun pile » .

(b) Dans cette question, on effectue n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : « on n'obtient aucun pile » .
Calculer $P(A_n)$.

(c) Comparer les résultats des deux questions.

E4 - EX4 TD6 Une urne contient 1 boule noire et 1 boule blanche.
On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est noire, on s'arrête ;
- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit B_k (resp. N_k) : « le $k^{\text{è}}$ tirage est réalisé et donne une boule blanche (resp. noire) » .
On définit de plus l'événement T : « le jeu se termine » .

(a) Calculer $P(N_1)$, $P(N_2)$, $P(N_3)$.

(b) Calculer $P(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer T en fonction des événements N_k.

(d) En déduire $P(T)$, interpréter ce résultat.