Programme de colle n°5

semaine du 12 au 17 octobre 2027

Chapitre 4 : séries numériques à termes positifs

- **Définition et propriétés**
  - Définition : série, somme partielle
  - Propriété : croissance de la suite des sommes partielles
  - Définition : série convergente, série divergente, somme d'une série
  - Condition nécessaire de convergence d'une série
  - Linéarité de la somme
  - Théorèmes de comparaison
- **Séries de référence**
  - Séries de Riemann : divergence de $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique), convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$
  - CNS de convergence et somme des séries suivantes :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k\geq 0} q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k\,q^{k-1} \qquad \sum_{k\geq 0} k(k-1)q^{k-2} \quad .$$

Chapitre 5 : Matrices

- Définitions
  - Matrice à n lignes et p colonnes, notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Égalité de deux matrices
  - Matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Opérations sur les matrices
  - Produit d'une matrice par un nombre réel (définition, propriétés)
  - Somme de deux matrices (définition, propriétés)
  - Produit de deux matrices (définition, propriétés)
  - Transposée d'une matrice (définition, propriétés)
- Matrices carrées particulières
  - Matrice diagonale : définition, produit de matrices diagonales
  - Matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)
  - Matrice identité : définition, produit par la matrice identité
- Puissances d'une matrice carrée
  - Puissances d'une matrice carrée : définition, propriétés
  - Puissances de la matrice identité
  - Formule du binôme de Newton

  - Puissances d'une matrice diagonale

- Inversibilité d'une matrice carrée
  - Définition
  - Inversibilité d'une matrice diagonale et inverse d'une matrice diagonale
  - Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire
  - Méthode lorsqu'on a une relation entre I, A, A^2 ...(vue sur des exemples)
  - Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 (déterminant, formule de l'inverse)
  - Inverse d'un produit
  - Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, si et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = Y$.

- systèmes linéaires
  - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système :
    $L_i \leftarrow L_j$
    $L_i \leftarrow \lambda L_j$
    $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - Principe de la méthode du pivot de Gauss

Questions de cours

Q1 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.

Q2 - Donner les séries de référence (au choix pour le colleur).

Q3 - Donner la définition d'une matrice inversible.

Q4 - Enoncer la formule du binôme de Newton pour des matrices avec les conditions d'application de la formule

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 6 TD 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 + \ln(x))$.

1. Donner le domaine de définition et celui de continuité de f. On admet que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Montrer que la dérivée f' de f ne s'annule qu'en une seule valeur notée α.
3. Prouver que $5/10 < \alpha < 6/10$.
4. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f.

E2 - Exercice 3 TD4 : Convergence de $\sum \frac{1}{n!}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n.\, n!}$$

(a) Démontrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ converge.

E3 - Exercice 6 TD4 : *Convergence de* $\sum \frac{1}{n^2}$

(a) Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$.

(c) Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

(d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^3 - 5n + 6}{(n^2-6)^2(n+1)}$.

E4 - Exercice 2 (TD5 question 2) : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) On note $D = P^{-1}AP$.
Calculer D puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

E5 - Exercice 2 (TD5 question 3) : On considère la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Établir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.