

# Programme de colle n°13

semaine du 19 au 24 janvier 2026

## Chapitre 13 « Intégrales improprest »

**On se limite au cas des fonctions continues et positives.**

### I. Définitions

- On dit que l'intégrale impropre  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  converge lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est finie.  
Dans ce cas, on définit  $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ .
- On dit que l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^a f(t)dt$  converge lorsque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt$  existe et est finie.  
Dans ce cas, on définit  $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt$ .
- On dit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  converge lorsqu'il existe  $a$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\int_{-\infty}^a f(t)dt$  et  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  convergent.  
Dans ce cas, on définit  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$ .

### II. Propriétés

- Linéarité et relation de Chasles
- Théorèmes de comparaison :
  - Si  $f \leq g$  et  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  converge, alors  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  converge et  $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$ .
  - Si  $f \leq g$  et  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  diverge, alors  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  diverge.
  - Si  $f \underset{+\infty}{\sim} g$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  et  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  sont de même nature.

### III. Intégrales de référence

- L'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- L'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  converge et vaut  $\sqrt{2\pi}$ .

## Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »

### I. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

### II. Variables aléatoires à densité

- Si  $X$  est une variable aléatoire, sa fonction de répartition est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = P(X \leq x)$ .
- Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une densité de probabilité lorsque :
  - $f$  positive sur  $\mathbb{R}$
  - $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$
  - l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  converge et vaut 1
- $X$  est une variable aléatoire à densité lorsqu'il existe une densité de probabilité  $f$  telle que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ .

**Dans la suite :**

- *f est une densité de probabilité*
- *X est une variable aléatoire de densité f*
- *F est la fonction de répartition de X*

**• Propriétés de la fonction de répartition :**

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- Sauf éventuellement en un nombre fini de points,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F' = f$

**• Calculs de probabilité :**

- $P(X = a) = 0$  donc  $P(X < a) = P(X \leq a)$  et  $P(X > a) = P(X \geq a)$
- $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t)dt$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$

**III. Espérance**

- Définition : sous réserve de convergence,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$
- Linéarité de l'espérance
- Théorème de transfert
  - sous sa forme générale : au programme mais assez rarement utilisé...
  - dans le cas particulier du calcul de  $E(X^2)$  : incontournable !

**IV. Variance**

- Formule de König-Huygens
- Variance de  $aX$  et de  $X + b$
- Définition de l'écart-type

**V. Indépendance**

- Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  à densité sont dites indépendantes lorsque pour tous intervalles  $I$  et  $J$ , on a :  $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

**Exercices à savoir refaire :**

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

**E1 - Exercice 1 Variable aléatoire à densité**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que  $f$  est une densité de probabilité.

*On note alors  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .*

(b) Déterminer  $F$ , la fonction de répartition de  $X$ .

(c)  $X$  admet-elle une espérance ?

**Exercice 2** *Variable aléatoire à densité*

Dans cet exercice,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

On note alors  $T$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

(b) Montrer que  $T$  admet une espérance et une variance de valeurs respectives  $E(T) = \frac{3a}{2}$  et  $V(T) = \frac{3a^2}{4}$ .

(c) i. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $T$ .

ii. Calculer  $P(T > 2a)$  et  $P_{(T>2a)}(T > 6a)$ .

**Exercice 3** *Loi de  $X - a$*

Soit  $a$  un réel strictement positif.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{a-t} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

(a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

On note  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ .

(b) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

(c) On considère alors la variable aléatoire :

$$Y = X - a$$

i. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .

ii. En admettant que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .

iii. Reconnaître la loi de  $Y$ .