

Programme de colle n°13

semaine du 19 au 24 janvier 2026

Chapitre 13 « Intégrales impropres »

On se limite au cas des fonctions continues et positives.

I. Définitions

- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.
Dans ce cas, on définit $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt$ existe et est finie.
Dans ce cas, on définit $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt$.
- On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge lorsqu'il existe a dans \mathbb{R} tel que $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent.
Dans ce cas, on définit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

II. Propriétés

- Linéarité et relation de Chasles
- Théorèmes de comparaison :
 - ▶ Si $f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$.
 - ▶ Si $f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.
 - ▶ Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

III. Intégrales de référence

- L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »

I. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

II. Variables aléatoires à densité

- Si X est une variable aléatoire, sa fonction de répartition est la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = P(X \leq x)$.
- Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une densité de probabilité lorsque :
 - ▶ f positive sur \mathbb{R}
 - ▶ f est continue par morceaux sur \mathbb{R}
 - ▶ l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1
- X est une variable aléatoire à densité lorsqu'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout x dans \mathbb{R} , $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Dans la suite :

- f est une densité de probabilité
- X est une variable aléatoire de densité f
- F est la fonction de répartition de X

• **Propriétés de la fonction de répartition :**

- ▶ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$
- ▶ F est croissante sur \mathbb{R}
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- ▶ F est continue sur \mathbb{R}
- ▶ Sauf éventuellement en un nombre fini de points, F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f$

• **Calculs de probabilité :**

- ▶ $P(X = a) = 0$ donc $P(X < a) = P(X \leq a)$ et $P(X > a) = P(X \geq a)$
- ▶ $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$
- ▶ $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt$
- ▶ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$

III. Espérance

- Définition : sous réserve de convergence, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$
- Linéarité de l'espérance
- Théorème de transfert ◦ sous sa forme générale : au programme mais assez rarement utilisé...
◦ dans le cas particulier du calcul de $E(X^2)$: incontournable !

IV. Variance

- Formule de König-Huygens
- Variance de aX et de $X + b$
- Définition de l'écart-type

V. Indépendance

- Deux variables aléatoires X et Y à densité sont dites indépendantes lorsque pour tous intervalles I et J , on a : $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 1 Variable aléatoire à densité

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f .

(b) Déterminer F , la fonction de répartition de X .

(c) X admet-elle une espérance ?

Exercice 2 Variable aléatoire à densité

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.

On note alors T une variable aléatoire de densité f .

(b) Montrer que T admet une espérance et une variance de valeurs respectives $E(T) = \frac{3a}{2}$ et $V(T) = \frac{3a^2}{4}$.

(c) i. Déterminer la fonction de répartition F de T .

ii. Calculer $P(T > 2a)$ et $P_{(T > 2a)}(T > 6a)$.

Exercice 3 Loi de $X - a$

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{a-t} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire réelle de densité f .

(b) Déterminer la fonction de répartition F de X .

(c) On considère alors la variable aléatoire :

$$Y = X - a$$

i. Déterminer la fonction de répartition de Y .

ii. En admettant que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité g de Y .

iii. Reconnaître la loi de Y .