Programme de colle n°10

semaine du 1er au 5 décembre 2025

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

- **Espaces vectoriels**
  - Définition, propriétés
  - Espaces vectoriels de référence $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- Sous-espaces vectoriels
  - Définition
  - Intersection de sous-espaces vectoriels
- Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré, famille génératrice
  - Vecteurs colinéaires
  - Combinaison linéaire
  - Notation $\text{vect}(x_1, \ldots, x_n)$
  - Propriété : $\text{vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel
  - Famille génératrice d'un espace vectoriel
- Famille libre, famille liée
  - Définition : famille libre, famille liée
  - Caractérisations :
    - ► une famille d'un seul vecteur est libre, si et seulement si, ce vecteur est non nul ;
    - ► une famille de 2 vecteurs est libre, si et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ;
    - ► une famille de n vecteurs est liée, si et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Bases, dimension
  - Définition d'une base
  - Définition de la dimension
  - Une famille est une base si et seulement si elle vérifie deux conditions parmi les trois suivantes :
    - ∗ famille libre
    - ∗ famille génératrice
    - ∗ nombre d'éléments est égal à $\dim(E)$
  - Espace vectoriel de dimension 0, 1, 2
  - La dimension d'un sous-espace vectoriel est inférieure ou égale à $\dim(E)$, cas d'égalité
  - Base canonique de $\mathbb{R}^n$, dimension de $\mathbb{R}^n$
  - Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
  - Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, dimension de $\mathbb{R}_n[X]$

- Coordonnées dans une base, matrice représentative dans une base
  - Coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base, matrice représentative d'un vecteur dans une base
  - Matrice représentative d'une famille de vecteurs dans une base
- Rang
  - Rang d'une famille de vecteurs : $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n) = \dim(\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_n))$
  - Rang d'une matrice : rang de la famille de vecteurs représentée pas A
  - Rang d'un système : nombre de pivots du système homogène associé
  - Propriété : le rang d'une matrice est égal au rang du système homogène associé

Chapitre 10 : Couples de Variables aléatoires

- **Préliminaire : sommes doubles**
- **Couples de variables aléatoires discrètes**
  - Définition de la loi conjointe (dans le cas d'un petit nombre de valeurs : représentation sous forme d'un tableau)
  - Système complet événements associé à un couple
- **Lois marginales**
  - Définition des lois marginales
  - Méthode de détermination des lois marginales :
    - si la loi du couple est donnée sous forme d'un tableau, les lois marginales peuvent être données directement sans justification théorique
    - dans le cas général, il faut utiliser la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements considéré
- **Lois conditionnelles**
  - Définition des lois conditionnelles
- **Covariance**
  - Définition de la covariance par la formule de König-Huygens : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
  - Utilisation du théorème de transfert pour le calcul de $E(XY)$
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) - 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- **Indépendance**
  - Définition : X et Y sont dites indépendantes lorsque pour toute valeur i de X et toute valeur j de Y, on a : $P[(X=i)\cap(Y=j)] = P(X=i)\times P(Y=j)$
  - Propriété : Si X et Y sont indépendantes, alors pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$ on a : $P[(X\in I)\cap(Y\in J)] = P(X\in I)\times P(Y\in J)$
  - Propriétés : Si X et Y sont indépendantes, alors on a $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Ex3 TD 9 : *Espace vectoriel de polynômes*
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on note F l'ensemble des polynômes de la forme :

$$aX^2 + bX + c \quad \text{avec } c = 2b - a$$

(a) On considère les polynômes $P(X) = X^2 + 2X + 2$ et $Q(X) = X^2 + 2X + 3$.
Les polynômes P et Q appartiennent-ils à F ?

(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Déterminer la dimension de F.

E2 - Ex4 TD 9 :*Droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note F l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant le système :

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la dimension de F.

E3 - Ex3 TD 10 *Couple fini*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telles que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$P\left[(X = i) \cap (Y = j)\right] = \lambda i j$$

(a) Déterminer λ.

(b) Déterminer la loi de X et celle de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes?

E4 - EX4 TD10 *Couple infini*
Soit $a > 0$, et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$P\left[(X = i) \cap (Y = j)\right] = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

(a) Déterminer a.

(b) Déterminer la loi de X et celle de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes ?