

Programme de colle n°14

semaine du 26 au 31 Janvier 2026

Même programme que la semaine précédente.

Chapitre 13 « Intégrales impropres »

Chapitre 14 « Variables aléatoires à densité »

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Exercice 1 Variable aléatoire à densité

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f .
- (b) Déterminer F , la fonction de répartition de X .
- (c) X admet-elle une espérance ?

Exercice 2 Variable aléatoire à densité

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
On note alors T une variable aléatoire de densité f .
- (b) Montrer que T admet une espérance et une variance de valeurs respectives $E(T) = \frac{3a}{2}$ et $V(T) = \frac{3a^2}{4}$.
- (c)
 - i. Déterminer la fonction de répartition F de T .
 - ii. Calculer $P(T > 2a)$ et $P_{(T>2a)}(T > 6a)$.

Exercice 3 Loi de $X - a$

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{a-t} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire réelle de densité f .
- (b) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- (c) On considère alors la variable aléatoire :

$$Y = X - a$$

- i. Déterminer la fonction de répartition de Y .
- ii. En admettant que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer une densité g de Y .
- iii. Reconnaître la loi de Y .