Programme de colle n°13

semaine du 13 au 17 janvier 2025

Chapitre 10 : Couples de Variables aléatoires

- **Préliminaire : sommes doubles**
- **Couples de variables aléatoires discrètes**
  - Définition de la loi conjointe (dans le cas d'un petit nombre de valeurs : représentation sous forme d'un tableau)
  - Système complet événements associé à un couple
- **Lois marginales**
  - Définition des lois marginales
  - Méthode de détermination des lois marginales :
    - si la loi du couple est donnée sous forme d'un tableau, les lois marginales peuvent être données directement sans justification théorique
    - dans le cas général, il faut utiliser la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements considéré
- **Lois conditionnelles**
  - Définition des lois conditionnelles
- **Covariance**
  - Définition de la covariance par la formule de König-Huygens : $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
  - Utilisation du théorème de transfert pour le calcul de $E(XY)$
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X,Y)$
- **Indépendance**
  - Définition : X et Y sont dites indépendantes lorsque pour toute valeur i de X et toute valeur j de Y, on a : $P[(X=i)\cap(Y=j)] = P(X=i)\times P(Y=j)$
  - Propriété : Si X et Y sont indépendantes, alors pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$ on a : $P[(X\in I)\cap(Y\in J)] = P(X\in I)\times P(Y\in J)$
  - Propriétés : Si X et Y sont indépendantes, alors on a $\text{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Chapitre 11 : Applications linéaires

- **Applications linéaires**
  - Définition et notation $\mathcal{L}(E,F)$
  - Image du vecteur nul
  - Somme de deux applications linéaires, produit par un nombre réel, composée
  - Application linéaire nulle et application Id_E
  - Endomorphisme, notation $\mathcal{L}(E)$

- **Isomorphismes**
  - Définition d'un isomorphisme
  - Propriété : la réciproque d'une application linéaire bijective est une application linéaire bijective
- **Noyau, image, rang**
  - Définition du noyau, le noyau est un sous-espace vectoriel de E
  - Caractérisation de l'injectivité avec le noyau
  - Définition de l'image, l'image est un sous-espace vectoriel de F
  - Caractérisation de la surjectivité avec l'image
  - Définition du rang d'une application linéaire
  - Formule du rang
  - Si f est un endomorphisme, alors : f bijective $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective
- **Matrice d'une application linéaire**
  - Matrice d'une application linéaire f dans un couple de bases
  - Théorème : $f(x)$ est représenté par AX (i.e. $m_{\mathcal{B}}(f(x)) = m_{\mathcal{B}}(f)m_{\mathcal{B}}(x)$)
  - Matrice de l'application linéaire nulle, de l'application linéaire identité
  - Opérations : matrice de $f+g$, de λf , de $f\circ g$, de f^{-1}
  - Propriété : f est bijective $\Longleftrightarrow$ A est inversible
  - Endomorphisme f canoniquement associé à une matrice A
  - Propriété : $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$

Exercices à savoir refaire :

Chaque élève se verra proposé un exercice de la liste suivante :

E1 - Ex3 TD 10 *Couple fini*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telles que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right] = \lambda i j$$

(a) Déterminer λ.

(b) Déterminer la loi de X et celle de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes?

E2 - EX4 TD10 *Couple infini*
Soit $a>0$, et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$:

$$P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right] = \frac{a}{2^{i+1}j!}$$

(a) Déterminer a.

(b) Déterminer la loi de X et celle de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes ?

E3 - Ex2 TD11

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Que vaut $f(X)$?

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que X appartienne à $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) Déterminer le rang de f par trois méthodes différentes.

E4 - EX6 TD11

$\mathbb{R}_2[X]$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f(aX^2 + bX + c) = cX^2 + bX + a$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Justifier que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer A^2, en déduire que A est inversible.

(d) En revenant à f, interpréter les résultats de la question précédente.