Programme de colle n°4

semaine du 6 au 11 octobre 2025

Chapitre 3 : séries numériques à termes positifs

- **Définition et propriétés**
  - Définition : série, somme partielle
  - Propriété : croissance de la suite des sommes partielles
  - Définition : série convergente, série divergente, somme d'une série
  - Condition nécessaire de convergence d'une série
  - Linéarité de la somme
  - Théorèmes de comparaison
- **Séries de référence**
  - Séries de Riemann : divergence de $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique), convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$
  - CNS de convergence et somme des séries suivantes :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k\geq 0} q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k\,q^k \qquad \sum_{k\geq 0} k^2\,q^k \quad .$$

Chapitre 4 : Probabilités discrètes

- **Définitions et premières propriétés**
  - Définition d'événements incompatibles (synonyme : disjoints)
  - cas particulier : probabilité d'un réunion disjointe finie
  - Définition d'événement contraire et propriété $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  - Propriété : probabilité d'une réunion de 2 événements (pas nécessairement disjoints)
    La formule pour $n > 2$ événements est hors-programme
  - Définition : probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nulle
  - Définitions : événement presque impossible, événement presque certain
- **Système complet d'événements, formule des probabilités totales**
  - Définition : système complet d'événements (fini ou infini)
  - Propriété : la somme des probabilités des événements d'un système complet est égale à 1
  - Formule des probabilités totales pour un système complet d'événements (fini ou infini) sous deux formes (avec les intersections, avec les probabilités conditionnelles)
- **Probabilité conditionnelle**
  - Propriété : la probabilité sachant un événement est une probabilité et toutes les propriétés qui en découlent.
  - Formule de Bayes
  - Formule des probabilités composées (pour $n > 1$ événements)

- **Indépendance**
  - Définition : A et B indépendants, ssi, $P_A(B) = P(B)$, ssi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - Définition non formalisée de l'indépendance mutuelle d'événements (probabilité de n'importe quelle intersection égale au produit des probabilités)

Questions de cours

Q1 - Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs ?

Q2 - Donner les séries de référence (au choix pour le colleur).

Q3 - Donner la définition d'un système complet d'événements (fini ou infini)

Q4 - Énoncer la formule des probabilités totales dans le cas où l'univers est fini, est dans le cas où l'univers est infini (inclus dans $\mathbb{N}$)

Q5 - Donner la définition de la mutuelle indépendance.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 6 TD 4
1. Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$.
3. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^3 - 5n + 6}{\left(n^2 - 6\right)^2 (n+1)}$.

E2 - Exercice 8 TD 4
1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.
3. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge.

E3 - Exercice 6 TD 5
Un dé comporte une face rouge et cinq faces vertes.
On réalise une suite illimitée de lancers indépendants.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note les événements suivants :

- R_k : « on obtient une face rouge au $k^{\text{è}}$ lancer »
- V_k : « on obtient une face verte au $k^{\text{è}}$ lancer »

On définit l'événement R : « on obtient au moins une fois la face rouge » et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : « on obtient la face rouge pour la première fois au $n^{\text{è}}$ lancer » .

(a) Calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Exprimer R en fonction des événements A_n.

(c) Calculer $P(R)$ et conclure.