Programme de colle n°2

semaine 5 du 27 septembre au 1er octobre 2021

Chapitre 3 : Fonctions usuelles

- Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances (définition,propriétés algébriques, variations, limites)
- Fonctions sh, ch, th (définition,propriétés algébriques, variations, limites)
- Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus. Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$. Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
- Cosinus et sinus des angles usuels.
- Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. (Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
- Fonctions circulaires cosinus et sinus.
- Fonction tangente
- Fonctions circulaires réciproques Arccos, Arcsin et Arctan

Chapitre 4 : Calculs algébriques

- Sommes et produits d'une famille finie de nombres réels
- Sommes et produits télescopiques, changements d'indices et de regroupements de termes.
- Expressions simplifiées de $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.
- Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
- Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.
- factorielle d'un entier, coefficients binomiaux.
- Formule du binôme de Newton dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours

Q1 - montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Q2 - Énoncer et démontrer le résultat sur la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$ avec x dans $\mathbb{R}$.

Q3 - Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Résoudre l'équation $\cos(x)+\sin(-3x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

E2 - Étudier les variations de la fonction suivante et tracer sa courbe représentative : $f(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

E3 - Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

E4 - Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}=\operatorname{Arcsin}x$$

E5 - (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)}$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

(c) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

E6 - Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ en fonction de n.

(b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)=2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

E7 - Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$.

E8 - Soit $n\in\mathbb{N}^*$, simplifier $E_n=\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$.

E9 - Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.