Programme de colle n°5

semaine du 13 au 17 octobre 2025

Chapitre 5 : Probabilités discrètes

- **Définitions et premières propriétés**
  - Définition d'événements incompatibles (synonyme : disjoints)
  - cas particulier : probabilité d'un réunion disjointe finie
  - Définition d'événement contraire et propriété $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  - Propriété : probabilité d'une réunion de 2 événements (pas nécessairement disjoints)
    La formule pour $n > 2$ événements est hors-programme
  - Définition : probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nulle
  - Définitions : événement presque impossible, événement presque certain
- **Système complet d'événements, formule des probabilités totales**
  - Définition : système complet d'événements (fini ou infini)
  - Propriété : la somme des probabilités des événements d'un système complet est égale à 1
  - Formule des probabilités totales pour un système complet d'événements (fini ou infini) sous deux formes (avec les intersections, avec les probabilités conditionnelles)
- **Probabilité conditionnelle**
  - Propriété : la probabilité sachant un événement est une probabilité et toutes les propriétés qui en découlent.
  - Formule de Bayes
  - Formule des probabilités composées (pour $n > 1$ événements)
- **Indépendance**
  - Définition : A et B indépendants, ssi, $P_A(B) = P(B)$, ssi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - Définition non formalisée de l'indépendance mutuelle d'événements (probabilité de n'importe quelle intersection égale au produit des probabilités)

Chapitre 6 : Variables aléatoires discrètes

- **Variable aléatoire discrète**
  - Définition de variable aléatoire discrète finie ou infinie (le programme de TB se restreint au cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$)
  - Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète
  - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète
- **Espérance**
  - Définition de l'espérance
  - Interprétation fréquentiste de l'espérance
  - Propriétés :

- Espérance d'une variable aléatoire constante
- Positivité de l'espérance
- Linéarité de l'espérance
- Théorème de transfert :
  - sous sa forme générale : au programme désormais !!!
  - dans le cas particulier du calcul de $E[X^2]$: incontournable !

- **Variance**
  - Propriétés de calcul
  - Formule de Konig-Huygens.

Questions de cours

Q1 - Donner la définition d'un système complet d'événements (fini ou infini)

Q2 - Énoncer la formule des probabilités totales dans le cas où l'univers est fini, est dans le cas où l'univers est infini (inclus dans $\mathbb{N}$)

Q3 - Donner la définition de la mutuelle indépendance.

Q4 - Enoncer la formule des probabilités composées.

Q5 - Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire et les conditions d'existences de ce nombre.

Exercices à savoir refaire :

E1 - Exercice 3 TD4
nombre fini / infini de lancers
Une pièce truquée donne pile avec probabilité $\frac{1}{100}$.
On effectue des lancers indépendants.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- P_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne pile »
- F_k : « le $k^{\text{ème}}$ lancer donne face »

On se demande s'il est possible de n'obtenir aucun pile.

(a) Dans cette question, on effectue une suite illimitée de lancers.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit B_k : « pile apparaît pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ lancer » .
On définit de plus l'événement B : « on obtient au moins une fois pile » .
  i. Calculer $P(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  ii. Exprimer B en fonction des événements B_k , en déduire $P(B)$.
  iii. Déterminer enfin la probabilité de l'événement A : « on n'obtient aucun pile » .

(b) Dans cette question, on effectue n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : « on n'obtient aucun pile » .
Calculer $P(A_n)$.

(c) Comparer les résultats des deux questions.

E2 - Exercice 2 TD 5
Soit a un nombre réel.
On considère une variable aléatoire X prenant toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$P(X = n) = a\frac{4^n}{n!}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que t^X admet une espérance et la calculer.

E3 - Exercice 3 TD 5
Une urne contient des boules blanches et des boules noires.
On note p la probabilité de tirer une boule noire et q la probabilité de tirer une boule blanche. On tire au hasard des boules une par une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule noire.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :
- N_k : "on obtient une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage"
- B_k : "on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage"

On note X la variable aléatoire discrète égale nombre de boules blanches obtenues.
1. Déterminer la loi de X.
2. Vérifier que la somme des $P(X = n)$ est égale à 1 .
3. Calculer $E(X)$ si elle existe.