Programme de colle n°16

semaine du 9 au 14 Mars 2026

Chapitre 16 « Géométrie euclidienne »

I. Produit scalaire

- Définition du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et propriétés du produit scalaire
- Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs
- Définition d'une famille orthogonale
- Propriété : une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre
- Plans de $\mathbb{R}^3$: équation, vecteur normal

II. Norme

- Définition de la norme d'un vecteur et propriétés de la norme
- Définition d'un vecteur normé ou unitaire

III. Bases orthonormales

- Définitions de famille et base orthonormale
- Propriété : une famille orthonormale est libre
- Propriété : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale
- Expression du produit scalaire et coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale
- Matrice de passage vers une base orthonormale : matrice telle que ${}^tPP = \mathrm{I}$
- Théorème spectral : une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale. Explicitement : Si S est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible avec ${}^tPP = \mathrm{I}$ telles que : $P^{-1}SP = D$.

IV. Projections orthogonales

F désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et x désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

- Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur $p(x)$ tel que :
  - $p(x) \in F$
  - $x - p(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F
- Propriété : p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$
- Expression de $p(x)$ dans une base orthonormale de F
- La distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F est : $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p(x)\|$.

Chapitre 17 « Compléments d'analyse »

I. Dérivées successives

- Définitions : dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$
- Les fonctions de référence du *Chapitre 1* sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition (à l'exception de la racine carrée et de la valeur absolue, non dérivables en 0)
- Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$: somme, produit, inverse, quotient, composition

II. Suites équivalentes

- Définition : on dit que $u_n \sim v_n$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
- Cas d'une limite finie non nulle : pour $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \sim \ell \iff \lim u_n = \ell$
- Opérations sur les équivalents : produit, quotient, élévation à une même puissance
- Équivalents et limites : si deux suites sont équivalentes, alors elles ont la même limite

III. Fonctions équivalentes

- Définition : on dit que $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
- Cas d'une limite finie non nulle : pour $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
- Opérations sur les équivalents : produit, quotient, élévation à une même puissance
- Équivalents et limites : si deux fonctions sont équivalentes en a, alors elles ont la même limite en a
- Équivalents de référence : fonction polynôme (en l'infini et en 0), fonction rationnelle (en l'infini et en 0), $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$), $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

IV. Fonctions négligeables devant x^n

- Définition : on dit que $f = \underset{x\to a}{o}(x^n)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$
- Propriété : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} x^n \iff f(x) = x^n + \underset{x\to a}{o}(x^n)$
- Comparaison de x^n et x^m au voisinage de 0 et de l'infini
- Opérations sur les o : multiplication et division

V. Développements limités

- Définitions : développement limité à l'ordre n en 0, partie régulière
- Formule de Taylor-Young
- Développement limités à connaître : $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$
- Opérations sur les développements limités : somme, produit, composition, primitivation
- Interprétation géométrique : tangente, position relative entre une courbe et sa tangente